

PRODUITS GAMMA ET VECTEURS PROPRES

DES MATRICES DE CARTAN

Véronique Cohen-Aptel et Vadim Schechtman

§1. Introduction

Le but de cet article est d'exprimer certains vecteurs propres de matrices de Cartan en termes de produits de valeurs de la fonction Γ .

Pour énoncer le résultat, fixons les notations standards sur les systèmes de racines, cf. [B].

Soient V un espace vectoriel réel de dimension $r \geq 1$, $R \subset V$ un système de racines fini irréductible. Munissons V d'un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ W -invariant, W étant le groupe de Weyl de R ; à l'aide de ce produit V sera identifié à son dual V^* ; en particulier on peut considérer les racines duales comme les éléments de V : $\alpha^\vee = 2\alpha/(\alpha, \alpha)$, $\alpha \in R$.

Choisissons une base $\{\alpha_i, 1 \leq i \leq r\}$ de racines simples de R .

Soit $A = ((\alpha_i|\alpha_j^\vee))$ la matrice de Cartan de R ; suivant l'usage, on dira que R est simplement lacé si A est symétrique.

Soit ρ la demi-somme des racines positives; on pose :

$$\rho^\vee = \frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} \alpha^\vee.$$

Soit h le nombre de Coxeter de R .

On définit des nombres réels strictement positives :

$$\Gamma(R, \alpha_i) = \prod_{\alpha > 0} \Gamma((\alpha|\rho^\vee)/h)^{-(\alpha^\vee|\alpha_i)},$$

et un vecteur

$$\Gamma(R) = (\Gamma(R, \alpha_1), \dots, \Gamma(R, \alpha_r)) \in \mathbb{R}^r.$$

D'autre part, la matrice $A' = I - A/2$ est indécomposable avec des coefficients positifs (c'est la matrice d'incidence du graphe de Dynkin de R). D'après le théorème de Perron - Frobenius (cf. [G], Ch. XIII, §2), A' admet un unique,

à proportionnalité près, vecteur propre v_{PF} de coordonnées strictement positives et de valeur propre réelle $\lambda_{max}(A') > 0$. Celle-ci est strictement supérieure aux valeurs absolues de toutes autres valeurs propres de A' .

En effet toutes les valeurs propres de A sont réelles et strictement positives, et v_{PF} est un vecteur propre de A de valeur propre minimale :

$$\lambda_{min}(A) = 4 \sin^2(\pi/2h),$$

où h est le nombre de Coxeter de R . On a

$$\lambda_{max}(A') = (2 - \lambda_{min}(A))/2 = \cos(\pi/2h).$$

On appelle v_{PF} le *vecteur de Perron-Frobenius* de A .

L'énoncé suivant est le résultat principal de cette note.

1.1. Théorème. Pour chaque système de racines R fini irréductible de rang r , tous les nombres $\pi\Gamma(R, \alpha_i)$, $1 \leq i \leq r$, sont algébriques.

Le vecteur $\Gamma(R)$ est le vecteur de Perron - Frobenius de la matrice de Cartan A de R .

Pour la preuve (qui est un calcul direct), voir §2 et Appendice (pour le cas E_8) ci-dessous.

Soit

$$\theta = \sum_{i=1}^r n_i \alpha_i$$

la plus longue racine ; on pose $n_0 = 1$, $\alpha_0 = -\theta$, donc $h = \sum_{i=0}^r n_i$.

On peut aussi définir les coordonnées de v_{PF} comme des *valeurs propres* d'une certaine matrice M liée à R , cf. [Fr], [FLO]. Ces nombres sont les masses des particules dans des modèles massives intégrables, les théories de Toda affines, cf. [Z], [FZ].

Maintenant on va énoncer une assertion semblable au théorème ci-dessus pour des matrices de Cartan affines. Soit \hat{A} la matrice de Cartan $(r+1) \times (r+1)$ du système de racines affine $R^{(1)}$, cf. [K]. Alors \hat{A} admet à proportionnalité près, un seul vecteur propre de valeur propre 0, et

$$\delta := (n_0, \dots, n_r) \in \mathbb{R}^{r+1}$$

est l'unique tel vecteur dont les coordonnées sont strictement positives et entières. Les nombres $n_i, 0 \leq i \leq r$ coïncident avec les marques de Kac du graphe de Dynkin complété $R^{(1)}$ (cf. la planche Aff 1, cf. [K], 4.8, 4.9).

Supposons d'abord que R soit simplement lacé, i.e. du type A_n, D_n ou $E_n, n = 6, 7, 8$.

Posons $\gamma(x) = \Gamma(x)/\Gamma(1-x)$,

$$\gamma(R, \alpha_i) = \prod_{\alpha > 0} \gamma((\alpha|\rho)/h)^{-(\alpha_i|\alpha)}, \quad 0 \leq i \leq r,$$

$$\gamma(R) = (\gamma(R, \alpha_0), \dots, \gamma(R, \alpha_r)) \in \mathbb{R}^{r+1}.$$

L'énoncé suivant est équivalent à une formule de V.Fateev, cf. [F1], (66). Cette formule remarquable a été le point de départ de cette note.

1.2. Théorème.

$$\gamma(R) = k(R)^{-1/h} \delta$$

où

$$k(R) = \prod_{i=1}^r n_i^{n_i}.$$

Pour le cas général, introduisons les nombres

$$n_i^\vee = n_i(\alpha_i|\alpha_i)/2$$

Au coefficient de proportionnalité commun près, ils coïncident avec les marques du graphe de Dynkin dual, obtenu en renversant les arrêts du graphe initial.

Soit

$$h^\vee = h^\vee(R) = \sum_{i=0}^r n_i^\vee$$

Posons :

$$\delta^\vee := (n_0^\vee, \dots, n_r^\vee),$$

c'est un vecteur propre, de valeur propre 0, de la matrice de Cartan généralisée \hat{A}^\vee duale de \hat{A} .

On définit :

$$\gamma(R, \alpha_i) = \prod_{\alpha > 0} \gamma((\alpha|\rho^\vee)/h)^{-(\alpha_i|\alpha^\vee)},$$

$$\gamma(R) = (\gamma(R, \alpha_0), \dots, \gamma(R, \alpha_r)).$$

L'énoncé suivant est équivalent à une formule de Fateev avec collaborateurs, [ABFKR], (46).

1.3. Théorème.

$$\gamma(R) = \left(\prod_{i=0}^r n_i^{\vee n_i} \right)^{-1/h} \delta^\vee.$$

La preuve de 1.2 et 1.3 se trouve dans §3.

Dans le dernier §4 on ajoute quelques remarques arithmétiques. On montre comment nos calculs, joints aux résultats de Deligne sur les sommes de Jacobi

(généralisant les théorèmes classiques d'André Weil) permettent à définir, à partir de R muni d'une base B de racines simples, des caractères galoisiens

$$\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}(\mu_h)) \longrightarrow \mathbb{Q}(\mu_h)^*$$

Il s'en suit que nos produits Γ donnent lieu au vecteurs propres en sens Galoisien: ils sont des vecteurs propres communs des Frobeniuses géométriques du corps $\mathbb{Q}(\mu_h)$, avec les sommes de Jacobi correspondants comme les valeurs propres.

À la fin on note une analogie avec un théorème d'Aomoto sur les intégrales de Selberg.

Le deuxième auteur est reconnaissant à Max-Planck-Institut für Mathematik à Bonn, où la partie de ce travail a été faite en juillet 2010. Il remercie aussi M.Gorelik pour une discussion précieuse à MPI en juillet 2011.

§2. Preuves: cas fini

Les vecteurs de Perron-Frobenius de toutes les matrices de Cartan finis sont connus explicitement. Voici leurs liste. Pour les systèmes simplement lacés, voir [GHJ], [KM], [P], [F2], [BCDS].

Pour les cas non-simplement lacés, voire [BCDS]; dans cet article un procédé de pliure ("folding") est décrit, qui permet d'obtenir le vecteur PF (dit aussi "de masses") des systèmes non-simplement lacés à partir des systèmes simplement lacés convenables. Ce pliure signifie que pour $R = B_n, C_n, F_4$ ou G_2 , le graphe de Dynkin dual de $R^{(1)}$ appartient à $\mathrm{Aff}^{(i)}$ avec $i = 2, 3$. Par exemple, le dual de $F_4^{(1)}$ est $E_6^{(2)}$ et le dual de $G_2^{(1)}$ est $D_4^{(3)}$.

On utilise la notation suivante pour un vecteur de Perron-Frobenius d'un système de racines R :

$$m(R) = (m_1, \dots, m_r).$$

On utilise la numérotation des sommets du graphe de Dynkin comme dans le livre de Bourbaki [B], Planches à la fin du livre.

A_n :

$$m_a = \sin(\pi a / (n + 1)), \quad 1 \leq a \leq n.$$

B_n :

$$m_a = 2 \sin(\pi a / 2n), \quad 1 \leq a \leq n - 1, \quad m_n = 1,$$

cf. D_{n+1} .

C_n :

$$m_a = \sin(\pi a / 2n), \quad 1 \leq a \leq n,$$

cf. A_{2n-1} .

D_n :

$$m_a = 2 \sin(\pi a / (2n - 2)), \quad 1 \leq a \leq n - 2, \quad m_{n-1} = m_n = 1.$$

E_6 :

$$m_1 = m_6 = 1, \quad m_3 = m_5 = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}}, \quad m_4 = \sqrt{3} + 1, \quad m_2 = \sqrt{2}.$$

E_7 :

$$m_7 = 1, \quad m_6 = 2 \cos(\pi/18), \quad m_1 = 2 \cos(5\pi/18), \quad m_4 = 4 \cos(\pi/18) \cos(\pi/9), \\ m_3 = 4 \cos(\pi/18) \cos(5\pi/18), \quad m_5 = 2 \cos(\pi/9) \cos(2\pi/9), \quad m_2 = 2 \cos(\pi/9).$$

E_8 :

$$m(E_8) = (2 \cos(\pi/5), 4 \cos(\pi/5) \cos(7\pi/30), 4 \cos(\pi/5) \cos(\pi/30), \\ 8 \cos^2(\pi/5) \cos(2\pi/15), 8 \cos^2(\pi/5) \cos(7\pi/30), 4 \cos(\pi/5) \cos(2\pi/15), 2 \cos(\pi/30), 1).$$

F_4 :

$$m_1 = \sqrt{2}, \quad m_2 = \sqrt{3} + 1, \quad m_3 = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}}, \quad m_4 = 1,$$

cf. E_6 .

G_2 :

$$m_1 = 1, \quad m_2 = \sqrt{3},$$

cf. D_4 .

Maintenant on va calculer les vecteurs $\Gamma(R)$. Rappelons les identités classiques satisfaites par la fonction $\Gamma(x)$:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{x}{\sin(\pi x)} \quad (C)$$

(formule des compléments);

$$\prod_{i=0}^{n-1} \Gamma(x + i/n) = (2\pi)^{(n-1)/2} n^{-nx+1/2} \Gamma(nx) \quad (M)$$

On aura besoin de trois cas $n = 2, 3, 5$ de cette formule; voici les cas $n = 2$ et 3 explicitement:

$$\Gamma(x)\Gamma(x + 1/2) = \pi^{1/2} 2^{-2x+1} \Gamma(2x) \quad (D)$$

(formule de duplication de Legendre) et

$$\Gamma(x)\Gamma(x + 1/3)\Gamma(x + 2/3) = 2\pi 3^{-3x+1/2} \Gamma(3x) \quad (T)$$

6

On a

$$\gamma(x) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(1-x)} = \frac{\sin(\pi x)}{\pi} \Gamma(x)^2,$$

donc

$$\Gamma(x)^2 = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \gamma(x).$$

On pose

$$s(x) := \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

Par exemple $s(1/2) = 1/\pi$.

$$s(R, \alpha_i) := \prod_{\alpha > 0} s((\alpha|\rho)/h)^{-(\alpha|\alpha_i)},$$

d'où

$$\Gamma(R, \alpha_i)^2 = s(R, \alpha_i) \gamma(R, \alpha_i).$$

Système de racines A_n

Le nombre de Coxeter $h = n + 1$.

Pour $1 \leq a \leq n$:

$$\Gamma(A_n, \alpha_a) = \{\Gamma(a/(n+1))\Gamma((n+1-a)/(n+1))\}^{-1} = \frac{\sin(\pi a/(n+1))}{\pi}.$$

Donc

$$\Gamma(A_n) = \pi^{-1}(\sin(\pi/(n+1)), \dots, \sin(\pi n/(n+1))) = \pi^{-1}m(A_n).$$

Système de racines B_n , $n \geq 2$

$h = 2n$. Pour $1 \leq a \leq n-1$:

$$\Gamma(B_n, \alpha_a) = \frac{\Gamma((n-a)/2n)\Gamma((2n-2a+2)/2n)}{\Gamma(a/2n)\Gamma((2n-2a)/2n)\Gamma((n-a+1)/2n)\Gamma((2n-a+1)/2n)} = \frac{\sin(\pi/2n)}{2^{-1/n}\pi}.$$

(on utilise (D) avec $x = (n-a)/2n$ et $x = (n-a+1)/2n$).

$$\Gamma(B_n, \alpha_n) = \Gamma(1/2n)^{-1}\Gamma(2/2n)\Gamma(n/2n)^{-1}\Gamma((n+1)/2n)^{-1} = 2^{-(n-1)/n}\pi^{-1}.$$

Il s'en suit :

$$\Gamma(B_n) = 2^{1/n}\pi^{-1}(\sin(\pi/2n), \dots, \sin((n-1)\pi/2n), 1/2) = 2^{1/n}\pi^{-1}m(B_n).$$

Système de racines C_n , $n \geq 2$

$h = 2n$. Pour $1 \leq a \leq n$:

$$\Gamma(C_n, \alpha_a) = \Gamma(a/2n)^{-1} \Gamma((2n-a)/2n)^{-1} = \frac{\sin(\pi a/2n)}{\pi},$$

d'où

$$\Gamma(C_n) = \pi^{-1}(\sin(\pi/2n), \dots, \sin(\pi n/2n)) = \pi^{-1}m(C_n).$$

Système de racines D_n , $n \geq 3$

$h = 2n - 2$. Pour $1 \leq a \leq n - 2$:

$$\begin{aligned} \Gamma(D_n, \alpha_a) &= \\ &= \frac{\Gamma((n-a-1)/(2n-2))\Gamma((2n-2a)/(2n-2))}{\Gamma((2n-2a-2)/(2n-2))\Gamma((2n-a-1)/(2n-2))\Gamma((n-a)/(2n-2))\Gamma(a/(2n-2))} = \\ &= 2^{1/(n-1)}\pi^{-1} \sin(\pi a/(2n-2)), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Gamma(D_n, \alpha_{n-1}) &= \Gamma(D_n, \alpha_n) = \\ &= \Gamma(1/(2n-2))^{-1} \Gamma(2/(2n-2)) \Gamma((n-1)/(2n-2))^{-1} \Gamma(n/(2n-2))^{-1} = 2^{-n/(n-1)}\pi^{-1}, \end{aligned}$$

D'où :

$$\Gamma(D_n) = 2^{1/(n-1)}\pi^{-1}m(D_n).$$

Système de racines E_6

$h = 12$. Le graphe de Dynkin admet un automorphisme σ d'ordre 2,

$\sigma(\alpha_1) = \alpha_6$, $\sigma(\alpha_3) = \alpha_5$, $\sigma(\alpha_i) = \alpha_i$ pour $i = 2, 4$.

Il s'en suit que $f(E_6, \alpha_i) = f(E_6, \sigma(\alpha_i))$ pour $f = \Gamma, \gamma$ ou s .

On va utiliser les formules élémentaires suivantes :

$$\begin{aligned} \sin(\pi/12) &= \sin(\pi/3 - \pi/4) = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}. \\ \sin(5\pi/12) &= \sin(7\pi/12) = \sin(\pi/3 + \pi/4) = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}. \\ s(1/4) &= \sqrt{2}\pi, \quad s(1/3) = s(2/3) = 2\pi/\sqrt{3}. \\ s(1/12)/s(5/12) &= (\sqrt{3}+1)/(\sqrt{3}-1) = (\sqrt{3}+1)^2/2. \end{aligned}$$

En plus, on utilisera le calcul du vecteur $\gamma(E_6)$, cf. ci-dessous.

On a:

$$\gamma(E_6, \alpha_1) = \gamma(E_6, \alpha_6) = \frac{\gamma(3/12)}{\gamma(1/12)\gamma(8/12)} = 2^{-1/2}3^{-1/4},$$

et

$$s(E_6, \alpha_1) = s(E_6, \alpha_6) = \frac{s(1/4)}{s(1/2)s(1/12)s(2/3)} = \frac{(\sqrt{3}-1)\sqrt{3}}{2^2\pi^2}.$$

Il s'en suit:

$$\Gamma(E_6, \alpha_1) = \Gamma(E_6, \alpha_6) = \frac{\Gamma(3/12)}{\Gamma(6/12)\Gamma(1/12)\Gamma(8/12)} = 2^{-5/4}\pi^{-1} \cdot 3^{1/8}(\sqrt{3}-1)^{1/4}.$$

$$\Gamma(E_6, \alpha_3) = \Gamma(E_6, \alpha_5) = \frac{\Gamma(6/12)}{\Gamma(4/12)\Gamma(5/12)\Gamma(9/12)}.$$

$$s(E_6, \alpha_3) = s(E_6, \alpha_5) = \frac{s(1/2)}{s(1/3)s(5/12)s(3/4)} = \pi^{-2} \cdot \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{2^3}.$$

$$\gamma(E_6, \alpha_3) = \gamma(E_6, \alpha_5) = \{\gamma(4/12)\gamma(5/12)\gamma(9/12)\}^{-1} = 2^{1/2}3^{-1/4}.$$

$$s(E_6, \alpha_1)/s(E_6, \alpha_3) = s(1/2)^{-2}s(1/4)^2s(5/12)/s(1/12) = 2^2(\sqrt{3}+1)^{-2}.$$

$$\Gamma(E_6, \alpha_1)/\Gamma(E_6, \alpha_3) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}.$$

$$\Gamma(E_6, \alpha_2) = \frac{1}{\Gamma(6/12)} \cdot \frac{\Gamma(2/12)\Gamma(10/12)}{\Gamma(1/12)\Gamma(11/12)} \cdot \frac{\Gamma(3/12)}{\Gamma(4/12)\Gamma(5/12)}.$$

$$\gamma(E_6, \alpha_2) = \frac{\gamma(3/12)}{\gamma(4/12)\gamma(5/12)} = \gamma(E_6, \alpha_3) = 2^{1/2}3^{-1/4}.$$

$$\Gamma(E_6, \alpha_2)/\Gamma(E_6, \alpha_3) = \frac{\Gamma(2/12)\Gamma(10/12)\Gamma(3/12)\Gamma(9/12)}{\Gamma(6/12)^2\Gamma(1/12)\Gamma(11/12)} = \frac{2}{\sqrt{3}+1}.$$

$$\Gamma(E_6, \alpha_4) = \Gamma(1/12)\Gamma(2/12)^{-1}\Gamma(10/12)^{-1}\Gamma(3/12)^{-2}\Gamma(9/12)\Gamma(4/12) \times \\ \Gamma(5/12)\Gamma(7/12)^{-1}\Gamma(6/12)^{-1}.$$

$$s(E_6, \alpha_4) = s(1/12)s(1/6)^{-2}s(1/4)^{-1}s(1/3)s(1/2)^{-1} = \{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)\}^{-1}.$$

$$s(E_6, \alpha_4)/s(E_6, \alpha_3) = 2^2/3.$$

$$\gamma(E_6, \alpha_4) = \gamma(1/12)\gamma(3/12)^{-3}.\gamma(4/12) = 2^{-1/2}3^{3/4}.$$

$$\gamma(E_6, \alpha_4)/\gamma(E_6, \alpha_3) = 3/2.$$

$$\Gamma(E_6, \alpha_4)/\Gamma(E_6, \alpha_3) = 2^{1/2}.$$

Il s'en suit :

$$\Gamma(E_6) = \Gamma(E_6, \alpha_1) \cdot (1, \sqrt{2}, (\sqrt{3}+1)/\sqrt{2}, \sqrt{3}+1, (\sqrt{3}+1)/\sqrt{2}, 1) =$$

$$= 2^{-5/4} 3^{1/8} (\sqrt{3} - 1)^{1/4} \pi^{-1} m(E_6).$$

Système de racines E_7

$h = 18$. En utilisant (D) et (T), on arrive aux valeurs suivantes de $\Gamma(E_7, \alpha_i)$:

$$\Gamma(E_7, \alpha_1) = \frac{\Gamma(3/18)\Gamma(5/18)\Gamma(16/18)}{\Gamma(1/18)\Gamma(6/18)\Gamma(8/18)\Gamma(10/18)\Gamma(17/18)} = \frac{\sin(\pi/9) \sin(2\pi/9)}{2^{-10/9} 3^{1/6} \pi}.$$

$$\Gamma(E_7, \alpha_2) = \frac{\Gamma(2/18)\Gamma(3/18)\Gamma(10/18)}{\Gamma(1/18)\Gamma(5/18)\Gamma(6/18)\Gamma(7/18)\Gamma(14/18)} = \frac{\sin(2\pi/9)}{2^{-1/9} 3^{1/6} \pi}.$$

$$\Gamma(E_7, \alpha_3) = \frac{\Gamma(8/18)\Gamma(15/18)}{\Gamma(5/18)\Gamma(9/18)\Gamma(11/18)\Gamma(16/18)} = 2^{-8/9} 3^{1/3} / \pi.$$

$$\begin{aligned} \Gamma(E_7, \alpha_4) &= \frac{\Gamma(1/18)\Gamma(5/18)\Gamma(9/18)\Gamma(14/18)}{\Gamma(2/18)\Gamma(3/18)\Gamma(7/18)\Gamma(8/18)\Gamma(12/18)\Gamma(15/18)} = \\ &= \frac{\sin(2\pi/9) \sin(4\pi/9)}{2^{-10/9} 3^{1/6} \pi}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma(E_7, \alpha_5) &= \frac{\Gamma(2/18)\Gamma(6/18)\Gamma(7/18)\Gamma(12/18)}{\Gamma(3/18)\Gamma(4/18)\Gamma(5/18)\Gamma(9/18)\Gamma(10/18)\Gamma(14/18)} = \\ &= \frac{\sin(2\pi/9) \sin(5\pi/18)}{2^{-10/9} 3^{1/6} \pi}. \end{aligned}$$

$$\Gamma(E_7, \alpha_6) = \frac{\Gamma(3/18)}{\Gamma(2/18)\Gamma(6/18)\Gamma(13/18)} = \frac{\sin(\pi/9) \sin(4\pi/9)}{2^{-10/9} 3^{1/6} \pi}.$$

$$\Gamma(E_7, \alpha_7) = \frac{\Gamma(4/18)}{\Gamma(1/18)\Gamma(9/18)\Gamma(12/18)} = \frac{\sin(\pi/9)}{2^{-1/9} 3^{1/6} \pi}.$$

Il s'en suit :

$$\begin{aligned} \Gamma(E_7) &= 2^{1/9} 3^{-1/6} \pi^{-1} (2 \sin(\pi/9) \sin(2\pi/9), \sin(2\pi/9), \sqrt{3}/2, 2 \sin(2\pi/9) \sin(4\pi/9), \\ &\quad 2 \sin(2\pi/9) \sin(5\pi/18), 2 \sin(\pi/9) \sin(4\pi/9), \sin(\pi/9)). \end{aligned}$$

En utilisant (M) avec $n = 1/9$, on a :

$$\sin(\pi/9) \sin(2\pi/9) \sin(4\pi/9) = \frac{\sqrt{3}}{8}, \quad (*)$$

Il s'en suit que :

$$\Gamma(E_7) = 2^{1/9} 3^{-1/6} \sin(\pi/9) \pi^{-1} m(E_7).$$

Le cas E_8 est plus pénible; il est traité dans l'Appendice.

Système de racines F_4

$$h = 12.$$

$$\begin{aligned}\Gamma(F_4, \alpha_1) &= \frac{1}{\Gamma(6/12)} \cdot \frac{\Gamma(2/12)\Gamma(10/12)}{\Gamma(1/12)\Gamma(11/12)} \cdot \frac{\Gamma(3/12)}{\Gamma(4/12)\Gamma(5/12)} = \Gamma(E_6, \alpha_2) = \\ &= 2^{-1/4} 3^{1/8} \pi^{-1} (\sqrt{3} + 1)^{-1/2}. \\ \Gamma(F_4, \alpha_2) &= \frac{1}{\Gamma(6/12)\Gamma(2/12)\Gamma(10/12)} \cdot \frac{\Gamma(1/12)\Gamma(4/12)\Gamma(5/12)\Gamma(9/12)}{\Gamma(3/12)^2\Gamma(7/12)} = \Gamma(E_6, \alpha_4) = \\ &= 2^{-3/4} 3^{1/8} \pi^{-1} (\sqrt{3} + 1)^{1/2}. \\ \Gamma(F_4, \alpha_3) &= \frac{\Gamma(6/12)}{\Gamma(4/12)\Gamma(5/12)\Gamma(9/12)} = \Gamma(E_6, \alpha_3) = \Gamma(E_6, \alpha_5) = 2^{-5/4} 3^{1/8} \pi^{-1} (\sqrt{3} + 1)^{1/2}. \\ \Gamma(F_4, \alpha_4) &= \frac{\Gamma(3/12)}{\Gamma(1/12)\Gamma(6/12)\Gamma(8/12)} = \Gamma(E_6, \alpha_1) = \Gamma(E_6, \alpha_6) = 2^{-5/4} 3^{1/8} \pi^{-1} (\sqrt{3} - 1)^{1/2}.\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\Gamma(F_4) &= \Gamma(F_4, \alpha_4)(\sqrt{2}, \sqrt{3} + 1, (\sqrt{3} + 1)/\sqrt{2}, 1) = \\ &= 2^{-5/4} 3^{1/8} \pi^{-1} (\sqrt{3} - 1)^{1/2} m(F_4).\end{aligned}$$

Système de racines G_2

$$h = 6$$

$$\Gamma(G_2, \alpha_1) = \frac{\Gamma(1/3)}{\Gamma(1/6)\Gamma(1/2)\Gamma(2/3)} = 2^{-2/3} \pi^{-1} = \Gamma(D_4, \alpha_1).$$

En utilisant la formule de duplication :

$$\Gamma(1/3) = 2^{-2/3} \pi^{-1/2} \Gamma(1/6) \Gamma(2/3).$$

Ensuite,

$$\Gamma(G_2, \alpha_2) = \frac{\Gamma(1/6)\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)^3\Gamma(5/6)} =$$

en employant la formule des compléments pour $x = 1/6$ et $1/3$,

$$= \frac{\sqrt{3}}{4\pi^2} \cdot \left[\frac{\Gamma(1/6)\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)} \right]^2 = \frac{\sqrt{3}}{2^{2/3}\pi} = \Gamma(D_4, \alpha_2).$$

Il s'en suit:

$$\Gamma(G_2) = 2^{-2/3} \pi^{-1} (1, \sqrt{3}) = 2^{-2/3} \pi^{-1} m(G_2).$$

§3. Preuves: cas affine

On utilise toujours les notations de §1.

Supposons d'abord que R soit simplement lacé.

3.1. Théorème (V.Fateev, [F], (66)).

Pour $1 \leq i \leq r$, on a

$$\gamma(R, \alpha_i) = k(R)^{-1/h} n_i \quad (3.1)$$

L'argument de Fateev est indirect; il vient de l'Ansatz de Bethe. Une preuve directe qui n'utilise que la propriété (M) de la fonction Gamma est possible, cf. [CA].

Ici nous supposons (3.1) connue.

Puisque :

$$\alpha_0 = - \sum_{i=1}^r \alpha_i,$$

on a

$$\gamma(R, \alpha_0) = \prod_{i=1}^r \gamma(R, \alpha_i)^{-n_i} = k(R)^{\sum_1^r n_i/h} \prod_{i=1}^r n_i^{-n_i} = k(R)^{-1/h},$$

puisque $\sum_1^r n_i = h - 1$. Il s'en suit que

$$\gamma(R) = k(R)^{-1/h} \delta,$$

ce qui démontre Théorème 1.2. \square .

Réciproquement, la valeur du facteur $k(R)^{-1/h}$ est uniquement définie si on veut que $\gamma(R)$ soit proportionel à δ .

Pour le cas général (pas forcément simplement lacé), posons :

$$k(R) = \prod_{i=1}^r n_i^{\vee n_i}.$$

La formule de C.Ahn, P.Baseilhac, V.A.Fateev, C.Kim et C.Rim dit :

3.2. Théorème ([APFKR]). Pour $1 \leq i \leq r$, on a

$$\gamma(R, \alpha_i) = k(R)^{-1/h} n_i^{\vee} \quad (3.2)$$

En supposant (3.2) connue, le même argument comme ci-dessus montre qu'elle implique Théorème 1.3.

§4. Autour de sommes de Jacobi

Soient N un entier ≥ 2 , $A_N = N^{-1}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$, B_N l'anneau de fonctions $f : A_N \rightarrow \mathbb{Q}$. Pour $a \in A_N$, soit $\langle a \rangle$ le représentant de a dans l'intervalle $]0, 1[$. On va utiliser la notation suivant: une fonction $f \in B_N$ sera écrit sous une forme

$$f = \sum_{a \in A_N} f(a)[a] = \sum_{i=1}^{N-1} f(i/N)[i]$$

On pose

$$\tilde{f} = \sum_{a \in A_N} (f(a) - f(1-a))[a]$$

Pour $f \in B_N$ on définit le nombre

$$\Gamma(f) = \prod_a \Gamma(\langle a \rangle)^{f(a)} \quad (4.1)$$

Alors

$$\Gamma(\tilde{f}) = \prod_a \gamma(\langle a \rangle)^{f(a)} \quad (4.2)$$

Posons

$$\mathbf{n}(f) = \sum_{a \in A_N} \langle a \rangle f(a)$$

Le groupe $U_N = (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ agit sur B_N de façon naturelle: $(uf)(a) := f(ua)$.

On définit un sous-groupe

$$C_N = \{f \in B_N \mid \mathbf{n}(f) \in \mathbb{Z}, \mathbf{n}(f) = \mathbf{n}(uf) \text{ pour tout } u \in U_N\} \subset B_N$$

et pour $k \in \mathbb{Z}$

$$C_{N,k} = \{f \in C_N \mid \mathbf{n}(f) = k\}$$

4.1. Théorème (Koblitz - Ogus, [KO], Deligne, [D2]). Si $f \in C_{N,k}$ alors $\pi^{-k}\Gamma(f)$ est un nombre algébrique.

Il serait intéressant à savoir si la réciproque est vraie, i.e. est-il vrai que, étant donnée une fonction $f \in B_N$ telle que $\pi^{-k}\Gamma(f)$ est algébrique, alors $f \in C_{N,k}$?

En tout cas, les produits Gamma discutés précédemment donnent lieu aux telles fonctions. En effet, pour R comme ci-dessus, on prend pour N le nombre de Coxeter h de R . Pour chaque $\alpha > 0$, $(\alpha|\rho)$ est un entier tel que $0 < (\alpha|\rho) < h$, et pour tout $1 \leq i \leq r$, $(\alpha|\alpha_i)$ est un entier. Définissons $f_{R,i} \in B_h$ par

$$f_{R,i}(j/h) = - \sum_{\alpha > 0: (\alpha|\rho)=j} (\alpha|\alpha_i)$$

Évidemment,

$$\Gamma(f_{R,i}) = \Gamma(R, i)$$

4.2. Proposition. Pour tout R, i , $f_{R,i} \in C_{N,-1}$ et $\tilde{f}_{R,i} \in C_{N,0}$.

Démonstration. On a calculé les valeurs de ces produits n'en utilisant que les formules (C) et (M) du §1; ceci implique l'assertion, cf. [KO].

Pour les systèmes exceptionnelles on peut vérifier cela directement. \square

4.3. Exemple. Écrivons explicitement les fonctions qui correspondent au système de racines E_6 .

On a $h = 12$. Le groupe $U_{12} = \{1, 5, 7, 11\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, avec des générateurs 5, 7.

$$\begin{aligned} f_{E_6,1} &= f_{E_6,6} = -[1] + [3] - [6] - [8], \\ f_{E_6,2} &= -[1] + [2] + [3] - [4] - [5] - [6] + [10] - [11], \\ f_{E_6,3} &= f_{E_6,5} = -[4] - [5] + [6] - [9], \\ f_{E_6,4} &= [1] - [2] - 2[3] + [4] + [5] - [6] - [7] + [9] - [10]. \end{aligned}$$

4.4. Corollaire. Pour tout racine simple α_i ,

$$\sum_{\alpha > 0} (\alpha_i | \alpha^\vee) (\rho^\vee | \alpha) = h.$$

Revenons au cas général. Suivant Weil et Deligne, on définit, à partir des éléments de B_N , des sommes de Jacobi et des caractères de Hecke, [W], [D1], [GK]. Rappelons la construction. Soit $K = \mathbb{Q}(\mu_N)$ où $\mu_N \subset \mathbb{C}^*$ est le groupe de racines N -èmes de 1. Soient \mathfrak{p} un idéal premier de K ne divisant pas $2N$, $k(\mathfrak{p})$ le corps de résidus, $N(\mathfrak{p}) = |k(\mathfrak{p})| = q = p^f$, t l'isomorphisme

$$t : \{x \in k^*(\mathfrak{p}) | x^N = 1\} \xrightarrow{\sim} \mu_N$$

inverse à la réduction modulo \mathfrak{p} . Fixons un caractère additif

$$\Psi : \mathbb{F}_p \xrightarrow{\sim} \mu_p.$$

Pour $a \in A_N$ on définit la somme de Gauss

$$g(a, \mathfrak{p}) = - \sum_{x \in k(\mathfrak{p})^*} t(x^{a(q-1)}) \Psi(\text{tr}(x)) \in K(\mu_p)$$

Pour $f \in B_N$ on définit "la somme de Jacobi"

$$J(f, \mathfrak{p}) = \prod_{a \in A_N} g(a, \mathfrak{p})^{f(a)}$$

Quand \mathfrak{p} varie, les nombres $J(f, \mathfrak{p})$ forment, d'après Weil, [W], un caractère de Hecke.

Maintenant supposons que $f \in C_{N,k}$. On définit le caractère de Hecke de K χ_f par

$$\psi_f(\mathfrak{p}) = N(\mathfrak{p})^{-k} J(f, \mathfrak{p});$$

il prend ces valeurs dans K et est d'ordre fini. Donc on peut passer du côté automorphe au côté galoisien: par la théorie de corps de classes à ψ_f correspond un caractère de Galois

$$\chi(f) : \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/K) \longrightarrow K^*$$

tel que $\psi_f(\mathfrak{p})$ est égal à la valeur de χ_f sur l'élément de Frobenius géométrique $F_{\mathfrak{p}}$. Voici une forme plus précise de 4.1:

4.5. Théorème (Deligne, [D2]; Gross-Koblitz, [GK]). Si $f \in C_{N,k}$, alors

$$\tilde{\Gamma}(f) := (2\pi i)^{-k} \Gamma(f)$$

est algébrique sur K et

$$\sigma \tilde{\Gamma}(f) = \chi(f)(\sigma) \tilde{\Gamma}(f)$$

4.6. Soient R comme ci-dessus, muni d'une base des racines simples $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\} \subset R$, $h = h(R)$, $K = \mathbb{Q}(\mu_h)$. Pour chaque $1 \leq i \leq r$ on obtient les caractères de Galois

$$\chi(f_{R,i}), \chi(\tilde{f}_{R,i}) : \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/K) \longrightarrow K^*$$

Par contre, pour tous i, j , $\Gamma(R, i)/\Gamma(R, j), \gamma(R, i)/\gamma(R, j) \in K$, donc ces caractères ne dependent pas de i . Nous les notons par $\chi_{R,B}, \tilde{\chi}_{R,B}$.

Si $R = A_r, B_r$ ou C_r alors $\chi_{R,B}$ est trivial.

Les bases de R forment un toreur $\mathcal{W}(R)$ sous le groupe de Weyl $W(R)$, cf. [B], Ch. VI, 1.5, Remarque 4, d'où les applications

$$\chi_R : \mathcal{W}(R) \times \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/K) \longrightarrow K^*$$

et

$$\tilde{\chi}_R : \mathcal{W}(R) \times \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/K) \longrightarrow K^*$$

4.7. Les intégrales (4.1) apparaissent comme les périodes de motifs de rang 1 contenus dans la cohomology des hypersurfaces de Fermat, cf. [D2]. Il existe une autre source de motifs de rang 1: les intégrales de Selberg.

Considérons, avec K.Aomoto, [A], deux types d'intégrales de Selberg:

(a) l'intégrale de Selberg classique, ou "réelle", [S]:

$$I_{\mathbb{R}}(\alpha, \beta, \rho; n) := \int_{[0,1]^n} \prod_{j=1}^n x_j^{\alpha-1} (1-x_j)^{\beta-1} \prod_{1 \leq j < k \leq n} (x_j - x_k)^{2\rho} dx_1 \dots dx_n; \quad (4.3)$$

(b) l'intégrale de Dotsenko - Fateev, ou "Selberg complexe", cf. [DF], [A]:

$$I_{\mathbb{C}}(\alpha, \beta, \rho; n) :=$$

$$\int_{\mathbb{C}^n} \prod_{j=1}^n |z_j|^{2(\alpha-1)} |1 - z_j|^{2(\beta-1)} \prod_{1 \leq j < k \leq n} |z_j - z_k|^{4\rho} \prod_{j=1}^n (i/2) dz_j \bar{d}z_j. \quad (4.4)$$

D'après Selberg,

$$I_{\mathbb{R}}(\alpha, \beta, \rho; n) = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{\Gamma(1 + \rho + j\rho) \Gamma(\alpha + j\rho) \Gamma(\beta + j\rho)}{\Gamma(1 + \rho) \Gamma(\alpha + \beta + (n + j - 1)\rho)}$$

D'un autre côté, le théorème d'Aomoto [A] peut être écrit sous une forme

$$I_{\mathbb{C}}(\alpha, \beta, \rho; n) = \pi^n \prod_{j=0}^{n-1} \frac{\gamma(1 + \rho + j\rho) \gamma(\alpha + j\rho) \gamma(\beta + j\rho)}{\gamma(1 + \rho) \gamma(\alpha + \beta + (n + j - 1)\rho)}$$

En revenant à notre exemple, on voit que le passage d'une matrice de Cartan finie à la matrice affine est parallèle au passage des intégrales de Selberg réelles aux intégrales complexes.

Appendice. Le cas E_8

On va utiliser les formules trigonométriques élémentaires suivantes.

$$\begin{aligned} s(x) &= \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \\ \Gamma(x)^2 &= \gamma(x) s(x) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\sin(3x) = \sin x (4 \cos^2 x - 1) = \sin x (3 - 4 \sin^2 x) \quad (2)$$

$$\cos(\pi/5) = \sin(3\pi/10) = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}; \quad \frac{1}{\cos(\pi/5)} = \sqrt{5} - 1 \quad (3a)$$

$$\cos(2\pi/5) = \sin(\pi/10) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \quad (3b)$$

$$\sin^2(\pi/5) = \frac{5 - \sqrt{5}}{8} \quad (3c)$$

$$\sin(\pi/5) \sin(2\pi/5) = \frac{\sqrt{5}}{4} \quad (3d)$$

$$\sin(2\pi/5) = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \sin(\pi/5) \quad (3e)$$

$$\frac{\sin(3\pi/10)}{\sin(\pi/10)} = 4 \cos^2(\pi/5) \quad (4)$$

$$\sin(\pi/15) \sin(4\pi/15) = \frac{1}{2}(\cos(\pi/5) - \cos(\pi/3)) = \frac{\sqrt{5}-1}{8} \quad (5)$$

On pose

$$\alpha := \sin(\pi/5).$$

Alors:

$$\sin(2\pi/15) = -\frac{1}{2}\alpha + \frac{1+\sqrt{5}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (6a)$$

$$\sin(4\pi/15) = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \cdot \alpha + \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (6b)$$

$$\sin(8\pi/15) = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1+\sqrt{5}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (6c)$$

$$\sin(\pi/15) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}\alpha - \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (6d)$$

Ensuite:

$$\sin(\pi/15) \cdot \sin(4\pi/15) = \frac{-1+\sqrt{5}}{8} \quad (7a)$$

$$\sin(2\pi/15) \cdot \sin(8\pi/15) = \frac{1+\sqrt{5}}{8} \quad (7b)$$

$$\sin(7\pi/30) = \frac{1-\sqrt{5}}{8} + \frac{(1+\sqrt{5})\sqrt{3}}{4}\alpha \quad (8a)$$

$$\sin(11\pi/30) = \frac{1+\sqrt{5}}{8} + \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha \quad (8b)$$

$$\sin(7\pi/30) \sin(13\pi/30) = \frac{3+\sqrt{5}}{8} = \sin(3\pi/10)^2 \quad (8c)$$

$$\sin(4\pi/15) \cdot \sin(8\pi/15) = \sin(3\pi/10) \cdot \sin(11\pi/30) \quad (9)$$

Les racines positives forment 2 groupes :

$$\alpha(\pm, ij) = \pm\epsilon_i + \epsilon_j, \quad 1 \leq i < j \leq 8,$$

56 racines ;

$$\alpha(\pm, \pm, \dots) = \frac{1}{2}(\epsilon_8 + \sum_{i=1}^7 s_i \epsilon_i), \quad s_i = \pm 1, \quad \prod s_i = 1,$$

64 racines ; $56 + 64 = 120$ racines positives.

Le nombre de Coxeter $h = 30$.

$$\begin{aligned}
\gamma_F(E_8) &:= (\gamma(E_8, \alpha_1), \dots, \gamma(E_8, \alpha_8)) = \\
&= 2^{-13/15} 3^{-2/5} 5^{-1/6} (2, 3, 4, 6, 5, 4, 3, 2) = \\
&= (2^{2/15} 3^{-2/5} 5^{-1/6}, 2^{-13/15} 3^{3/5} 5^{-1/6}, 2^{17/15} 3^{-2/5} 5^{-1/6}, 2^{2/15} 3^{3/5} 5^{-1/6}, \\
&2^{-13/15} 3^{-2/5} 5^{5/6}, 2^{17/15} 3^{-2/5} 5^{-1/6}, 2^{-13/15} 3^{3/5} 5^{-1/6}, 2^{2/15} 3^{-2/5} 5^{-1/6}).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m(E_8) &= (2 \cos(\pi/5), 4 \cos(\pi/5) \cos(7\pi/30), 4 \cos(\pi/5) \cos(\pi/30), \\
&8 \cos^2(\pi/5) \cos(2\pi/15), 8 \cos^2(\pi/5) \cos(7\pi/30), 4 \cos(\pi/5) \cos(2\pi/15), 2 \cos(\pi/30), 1) = \\
&= (1, 62; 2, 40; 3, 22; 4, 78; 3, 89; 2, 96; 1, 99; 1).
\end{aligned}$$

— les masses des particules dans le modèle d'Ising critique avec le champs magnétique (Zamolodchikov).

$$\begin{aligned}
\gamma(E_8, \alpha_1) &= \frac{\gamma(3/30) \gamma(5/30) \gamma(16/30)}{\gamma(1/30) \gamma(8/30) \gamma(10/30) \gamma(12/30) \gamma(23/30)} = \\
&= 2^{2/15} 3^{-2/5} 5^{-1/6}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma(E_8, \alpha_1) &= \frac{\Gamma(3/30) \Gamma(5/30) \Gamma(16/30)}{\Gamma(1/30) \Gamma(8/30) \Gamma(10/30) \Gamma(12/30) \Gamma(23/30)} = \\
&2^{16/15} 3^{1/20} 5^{-1/12} \pi^{-1} \sin(\pi/15) \cdot \left(\frac{\sin(2\pi/5) \sin(2\pi/15) \sin(4\pi/15)}{\sin(\pi/10)} \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma(E_8, \alpha_2) &= \frac{\gamma(2/30) \gamma(3/30) \gamma(10/30) \gamma(12/30) \gamma(21/30)}{\gamma(1/30) \gamma(6/30) \gamma(7/30) \gamma(8/30) \gamma(15/30) \gamma(17/30) \gamma(24/30)} = \\
&= 2^{-13/15} 3^{3/5} 5^{-1/6}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma(E_8, \alpha_2) &= \frac{\Gamma(2/30) \Gamma(3/30) \Gamma(10/30) \Gamma(12/30) \Gamma(21/30)}{\Gamma(1/30) \Gamma(6/30) \Gamma(7/30) \Gamma(8/30) \Gamma(15/30) \Gamma(17/30) \Gamma(24/30)} \\
&2^{-103/30} 3^{1/20} 5^{-1/12} \pi^{-1} \frac{\sin(\pi/5)}{\sin(\pi/15)} \cdot [\sin(4\pi/15) \sin(8\pi/15) \sin(\pi/10) \sin(3\pi/10) \sin(2\pi/5)]^{-1/2}.
\end{aligned}$$

En utilisant (7a) et (7b), on obtient :

$$\Gamma(E_8, \alpha_2) / \Gamma(E_8, \alpha_8) = \frac{1}{2 \sin(\pi/15)}.$$

D'un autre côté,

$$m_2 = m_2 / m_8 = 4 \cos(\pi/5) \sin(4\pi/15) = (1 + \sqrt{5}) \sin(4\pi/15),$$

d'où :

$$\Gamma(E_8, \alpha_2)/\Gamma(E_8, \alpha_8) = m_2/m_8.$$

$$\begin{aligned}\gamma(E_8, \alpha_3) &= \frac{\gamma(8/30)\gamma(15/30)\gamma(22/30)}{\gamma(7/30)\gamma(11/30)\gamma(13/30)\gamma(20/30)\gamma(24/30)} = \\ &= 2^{17/15}3^{-2/5}5^{-1/6}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma(E_8, \alpha_3) &= \frac{\Gamma(8/30)\Gamma(15/30)\Gamma(22/30)}{\Gamma(7/30)\Gamma(11/30)\Gamma(13/30)\Gamma(20/30)\Gamma(24/30)} = \\ &= 2^{1/15}3^{1/20}5^{-1/12}\pi^{-1}\sin(4\pi/15)^{-1}(\sin(\pi/5)\sin(7\pi/30)\sin(11\pi/30)\sin(13\pi/30))^{1/2} = \\ &= 2^{17/30}3^{1/20}5^{-1/12}\pi^{-1}\sin(8\pi/15) \cdot \left(\frac{\sin(\pi/5)\sin(2\pi/15)}{\sin(4\pi/15)}\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

De là, on obtient :

$$\Gamma(E_8, \alpha_3)/\Gamma(E_8, \alpha_8) = 2^{-1/2}(1 + \sqrt{5})\sin(3\pi/10) \cdot \left(\frac{\sin(11\pi/30)}{\sin(2\pi/15)\sin(4\pi/15)}\right)^{1/2}.$$

D'autre part :

$$m_3 = 4\sin(3\pi/10)\sin(8\pi/15),$$

d'où :

$$\Gamma(E_8, \alpha_3)/\Gamma(E_8, \alpha_8) = m_3,$$

en utilisant (9).

$$\begin{aligned}\gamma(E_8, \alpha_4) &= \frac{\gamma(1/30)\gamma(4/30)\gamma(11/30)\gamma(20/30)\gamma(24/30)}{\gamma(2/30)\gamma(3/30)\gamma(8/30)\gamma(12/30)\gamma(18/30)\gamma(22/30)\gamma(25/30)} = \\ &= 2^{2/15}3^{3/5}5^{-1/6}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma(E_8, \alpha_4) &= \frac{\Gamma(1/30)\Gamma(4/30)\Gamma(11/30)\Gamma(20/30)\Gamma(24/30)}{\Gamma(2/30)\Gamma(3/30)\Gamma(8/30)\Gamma(12/30)\Gamma(18/30)\Gamma(22/30)\Gamma(25/30)} = \\ &= 2^{-14/15}3^{1/20}5^{-1/12}\pi^{-1}\sin(2\pi/5) \cdot \left(\frac{\sin(\pi/10)}{\sin(\pi/5)\sin(\pi/15)\sin(2\pi/15)}\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

On a :

$$m_4 = 8 \cdot \frac{\sin(3\pi/10)}{\sin(4\pi/15)\sin(8\pi/15)}$$

(on utilise (9)). Il s'en suit, en employant (7) et (3), que :

$$\Gamma(E_8, \alpha_4)/\Gamma(E_8, \alpha_8) = m_4.$$

$$\begin{aligned}\gamma(E_8, \alpha_5) &= \\ \frac{\gamma(2/30)\gamma(6/30)\gamma(7/30)\gamma(8/30)\gamma(12/30)\gamma(13/30)\gamma(18/30)\gamma(25/30)}{\gamma(4/30)^2\gamma(5/30)\gamma(9/30)\gamma(10/30)\gamma(11/30)\gamma(15/30)\gamma(16/30)\gamma(21/30)\gamma(26/30)} &= \\ &= 2^{-13/15}3^{-2/5}5^{5/6}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma(E_8, \alpha_5) &= \\ \frac{\Gamma(2/30)\Gamma(6/30)\gamma(7/30)\Gamma(8/30)\Gamma(12/30)\Gamma(13/30)\Gamma(18/30)\Gamma(25/30)}{\Gamma(4/30)^2\Gamma(5/30)\Gamma(9/30)\Gamma(10/30)\Gamma(11/30)\Gamma(15/30)\Gamma(16/30)\Gamma(21/30)\Gamma(26/30)} &= \\ 2^{-13/30}3^{1/20}5^{5/12}\pi^{-1}\frac{\sin(3\pi/10)}{\sin(2\pi/5)} \cdot \left(\frac{\sin(2\pi/15)\sin(4\pi/15)}{\sin(\pi/5)}\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

En utilisant (3d), (4) et (5), on vérifie sans peine que :

$$\Gamma(E_8, \alpha_5)/\Gamma(E_8, \alpha_8) = 8 \cos^2(\pi/5) \cos(2\pi/15) = m_5/m_8.$$

$$\begin{aligned}\gamma(E_8, \alpha_6) &= \frac{\gamma(9/30)\gamma(15/30)\gamma(26/30)}{\gamma(6/30)\gamma(13/30)\gamma(14/30)\gamma(20/30)\gamma(27/30)} = \\ &= 2^{17/15}3^{-2/5}5^{-1/6}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma(E_8, \alpha_6) &= \frac{\Gamma(9/30)\Gamma(15/30)\Gamma(26/30)}{\Gamma(6/30)\Gamma(13/30)\Gamma(14/30)\Gamma(20/30)\Gamma(27/30)} = \\ &= 2^{47/30}3^{1/20}5^{-1/12}\pi^{-1} \sin(4\pi/15) \cdot \left(\sin(\pi/5) \sin(\pi/15) \sin(8\pi/15)\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

On a :

$$m_6 = 4 \sin(4\pi/15) \sin(8\pi/15)$$

(en employant (9)), d'où, en utilisant (3c) et (7),

$$\Gamma(E_8, \alpha_6)/\Gamma(E_8, \alpha_8) = m_6.$$

$$\begin{aligned}\gamma(E_8, \alpha_7) &= \frac{\gamma(4/30)\gamma(10/30)\gamma(14/30)\gamma(27/30)}{\gamma(2/30)\gamma(9/30)\gamma(12/30)\gamma(15/30)\gamma(19/30)\gamma(28/30)} = \\ &= 2^{-13/15}3^{3/5}5^{-1/6}.\end{aligned}$$

$$\Gamma(E_8, \alpha_7) = \frac{\Gamma(4/30)\Gamma(10/30)\Gamma(14/30)\Gamma(27/30)}{\Gamma(2/30)\Gamma(9/30)\Gamma(12/30)\Gamma(15/30)\Gamma(19/30)\Gamma(28/30)} =$$

$$= 2^{-13/30} 3^{1/20} 5^{-1/12} \pi^{-1} \cdot \left(\frac{\sin(2\pi/5) \sin(\pi/15)}{\sin(2\pi/15)} \right)^{1/2}.$$

En utilisant (7a),

$$\Gamma(E_8, \alpha_7)/\Gamma(E_8, \alpha_8) = \frac{1 + \sqrt{5}}{4 \sin(2\pi/15)}.$$

D'un autre côté,

$$m_7 = 2 \sin(8\pi/15),$$

d'où

$$\Gamma(E_8, \alpha_7)/\Gamma(E_8, \alpha_8) = m_7,$$

vu (7b).

$$\begin{aligned} \gamma(E_8, \alpha_8) &= \frac{\gamma(5/30)\gamma(9/30)\gamma(28/30)}{\gamma(1/30)\gamma(10/30)\gamma(14/30)\gamma(18/30)\gamma(29/30)} = \\ &= 2^{2/15} 3^{-2/5} 5^{-1/6}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma(E_8, \alpha_8) &= \frac{\Gamma(5/30)\Gamma(9/30)\Gamma(28/30)}{\Gamma(1/30)\Gamma(10/30)\Gamma(14/30)\Gamma(18/30)\Gamma(29/30)} = \\ &= 2^{16/15} 3^{1/20} 5^{-1/12} \pi^{-1} \sin(\pi/15) \cdot \left(\frac{\sin(2\pi/5) \sin(2\pi/15) \sin(4\pi/15)}{\sin(3\pi/10)} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

En employant (4), on voit que

$$\Gamma(E_8, \alpha_1)/\Gamma(E_8, \alpha_8) = 2 \cos(\pi/5) = m_1/m_8.$$

On a donc vérifié que :

$$\Gamma(E_8) = \Gamma(E_8, \alpha_8) m(E_8).$$

Bibliographie

[ABFKR] C.Ahn, P.Baseilhac, V.A.Fateev, C.Kim, C.Rim, Reflection amplitudes in non-simply laced Toda theories and thermodynamic Bethe Ansatz, *Phys. Let.* **B481** (2000), 114 - 124.

[A] K.Aomoto, On the complex Selberg integral, *Quart. J. Math. Oxford* (2), **38** (1987), 385 - 399.

[B] N.Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Ch. IV - VI.

[BCDS] H.W.Braden, E.Corrigan, P.E.Dorey, R.Sasaki, Affine Toda field theory and exact S -matrices, *Nucl. Phys.* **B338** (1990), 689 - 746.

- [CA] V.Cohen-Aptel, Formule de Fateev, arXiv:1012.5203.
- [D1] P.Deligne, Valeurs de fonctions L et périodes des intégrales, *Proc. Symp. Pure Math.* **33** (1979), part 2, 313 - 346.
- [D2] P.Deligne, Hodge cycles on Abelian varieties, dans: P.Deligne, J.S.Milne, A.Ogus, K.Shih, Hodge cycles, Motives and Shimura varieties, *Lect. Notes Math.* **900** (1982), 9 - 100.
- [DF] V.I.S.Dotsenko, V.A.Fateev, Four point correlation functions and the operator algebra in 2D conformal invariant theories with central charge $c \leq 1$, *Nucl. Phys.* **B251** (1985), 691 - 734.
- [F1] V.A.Fateev, Normalization factors, reflection amplitudes and integrable systems, hep-th/0103014.
- [F2] V.A.Fateev, The exact relations between the coupling constants and the masses of particles for the integrable perturbed Conformal Field Theories, *Phys. Lett.* **B324** (1994), 45 - 51.
- [FZ] V.A.Fateev, A.B.Zamolodchikov, Conformal Field Theory and purely elastic S -matrices, *Int. J. Mod. Phys. A*, **5** (1990), 1025 - 1048.
- [Fr] M.D.Freeman, On the mass spectrum of affine Toda field theory, *Phys. Lett.* **B261** (1991), 57 - 61.
- [FLO] A.Fring, H.C.Liao, D.I.Olive, The mass spectrum and coupling in affine Toda theories, *Phys. Lett.* **B266** (1991), 82 - 86.
- [G] F.R.Gantmacher, Théorie des matrices.
- [GHJ] F.M.Goodman, P.de la Harpe, V.F.R.Jones, Coxeter graphs and towers of algebras, MSRI Publ. **14**, Springer, 1989.
- [GK] B.Gross, N.Koblitz, Gauss sums and p -adic Γ -function, *Ann. Math.*, **109** (1979), 569 - 581.
- [K] V.G.Kac, Infinite dimensional Lie algebras.
- [KM] T.R.Klassen, E.Melzer, Purely elastic scattering theories and their ultra-violet limits, *Nucl. Phys.* **B338** (1990), 485 - 528.
- [KO] N.Koblitz, A.Ogus, Algebraicity of some products of values of the Γ -function, Annexe à [D].
- [P] V.Pasquier, Two dimensional critical systems labelled by Dynkin diagrams, *Nucl. Phys.* **B285** (1987), 162 - 172.
- [S] A.Selberg, Bemerkninger om et multipliet integral, *Norsk. Mat. Tidsskr.* **26** (1944), 71 - 78.

[W] A.Weil, Jacobi sums as Grössencharctere, *Trans. AMS* **73** (1952), 487 - 495.

[Z] A.B.Zamolodchikov, Integrals of motion and S -matrix of the (scaled) $T = T_c$ Ising model with magnetic field, *Int. J. Mod. Phys. A*, **4** (1989), 4235 - 4248.

Institut de Mathématiques de Toulouse, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 Toulouse